بهینه‌سازی همزمان شکل پوسته و پیکره سخت کننده با روش مجانب‌های پویا*

بهروز حسنی(۱)	حسین قاسم نژاد مقری(۲)	سید مهدی توکلی(۳)

چکیده در این مقاله بهینه‌سازی شکل و پیکره سخت کننده پوسته‌ها به صورت همزمان انجام شده است. هدف به دست آوردن شکل بهینه پوسته همراه با چیدمان و نحوه قرارگیری بهینه لایه‌های سخت‌کننده در دو سوی سطح سازه پوسته‌ای است. به عبارت دیگر، با استفاده از این روش، همزمان با بهینه‌سازی شکل صفحه میانی پوسته، پیکره سخت‌کننده‌های سطحی نیز بهینه شده است. روش حل مسئله برمبنای گسسته‌سازی اجزا محدود است. مصالح هر جزء توسط مواد ساختگی با حفره‌های ریزمقیاس مستطیلی شبیه‌سازی شده‌اند. چگالی مصالح هر جزء، به صورت تابعی از پارامترهای هندسی حفره‌های ریزمقیاس بیان شده و به عنوان متغیر طراحی در فرایند بهینه‌سازی پیکره مورد استفاده قرار گرفته‌اند. هندسه پوسته با استفاده از سطوح نربز تولید شده و نقاط کنترلی تولیدکننده سطح به‌عنوان متغیر طراحی در قسمت بهینه‌سازی شکل استفاده شده‌اند. مسئله بهینه‌سازی در هر بخش با استفاده از روش مجانب‌های پویا حل شده است. به منظور نشان دادن کارایی روش، چند مثال ارائه شده و نتایج مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

واژه‌های کلیدی بهینه‌سازی پیکره، بهینه‌سازی شکل، پوسته، سخت کننده.

Simultaneous Shape and Reinforcement Topology Optimization of Shell Structures by Using the Method of Moving Asymptotes

B. Hassani	H. Ghasemnejad	S. M. Tavakoli

Abstract *This article is devoted to the simultaneous optimization of shape and topology of shell structures. The optimum shape is obtained together with the optimum layout for the reinforcement layers at the both sides of the shell surface. To solve this problem the finite element method is employed. It is assumed that each element is comprised of a porous media with microscopic rectangular voids where the density of the material in each element is a function of the geometric parameters of the voids. These parameters are also considered as the design variables of the topology optimization problem. The geometry of the shell structure is defined by using Non-Uniform Rational B-Splines (NURBS) technique and the control points of the NURBS' surfaces are considered as the design variables of the shape optimization problem. For solution the Method of Moving Asymptotes (MMA) is employed. To demonstrate the efficiency of the method a few examples are presented and the results are discussed.*

Key Words Topology Optimization, Shape Optimization, Shell, Stiffener.

---

* نسخه‌ی اول مقاله در تاریخ ۱۳۸۹/۸/۹ و نسخه‌ی نهایی آن در تاریخ ۱۳۹۰/۵/۹به دفتر نشریه رسیده است.

(۱) نویسنده‌ی مسئول، دانشیار دانشکده عمران و معماری، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۲) دانشجوی دکتری سازه دانشکده عمران، دانشگاه صنعتی شاهرود

(۳) فارغ التحصیل دکتری سازه، دانشکده عمران، دانشگاه علم و صنعت ایران

مقدمه

بهینه‌سازی سازه‌ای در دهه‌های اخیر پیشرفت‌های زیادی کرده و کاربردهای موفقیت‌آمیزی در مسائل مهندسی داشته است. در بهینه‌سازی شکل، با مفروض بودن بارگذاری و شرایط مرزی، هدف دست‌یابی به بهترین هندسه مرزهای دامنه طراحی است. از جمله مراجع در این زمینه می توان به زینکویچ (Zienkiewicz) و کمپبل (Campbell) [1]، هافکا (Haftka) و جاندلی (Gandhy) [2] و دینگ (Ding) [3] و همچنین اولهف (Olhoff) و رزوانی (Rozvany) [4] اشاره نمود.

در بهینه‌سازی شکل به صورت متعارف آن فرض بر آن است که پیکره (topology) دامنه مسئله ثابت است. اما در حالت کلی روش‌های بهینه‌سازی که قادر به ایجاد تغییر در تعداد، موقعیت و نحوه ارتباط عناصر سازه‌ای یا به طور خلاصه پیکره سازه باشند، مورد نیاز هستند. در سال‌های اخیر روش‌های متنوعی برای این نوع بهینه‌سازی معرفی شده‌اند و در حال حاضر روش‌های زیادی برای حل مسئله پیکره وجود دارد. در تحقیقات اولیه که توسط بندسو (Bendsoe) و کیکوچی (Kikuchi) [5] انجام، روش حل بر مبنای استفاده از ریزسازه‌ها (Micro structures) و به دست آوردن خواص مکانیکی مصالح با استفاده از تئوری همگن سازی (Homogenization) بوده است. یک روش جایگزین برای آن، استفاده از مصالح ساختگی همسانگرد با اعمال تاوان یا SIMP (Solid Isotropic Material with Penalization) است [6]. در این روش ماده مورد استفاده همسان فرض می‌شود و چگالی به عنوان تابعی از مختصات مصالح مقداری بین صفر و یک اختیار می‌کند طوری که چگالی یک به معنای وجود و چگالی صفر به معنای عدم وجود مصالح بیان می‌شود. علاوه بر این روش‌ها، روش‌های دیگری نیز برای بهینه‌سازی پیکره وجود دارد. از آن میان می توان به روش‌های تکاملی (Evolutionary optimization) (ژی و استیون [7]) روش کلونی مورچه‌ها (Ant colony) [8]، روش سازه مبنا (Ground structure) [9]، و دیگر روش‌ها اشاره نمود.

به طور معمول در بهینه‌سازی پیکره نحوه توزیع مصالح در یک دامنه ثابت جستجو می‌گردد و سازه به دست آمده به عنوان سازه پایه جهت بهینه‌سازی شکل مورد استفاده قرار می‌گیرد (اولهوف و همکاران [10]؛ لین و چاو [11]). بهینه‌سازی پیکره سخت کننده سازه پوسته‌ای در حالتی که شکل صفحه میانی آن (سازه پایه) ثابت است لزوماً به معنی رسیدن به بهترین پاسخ یا حتی یک پاسخ مناسب نیست. زیرا در نظر گرفتن شکل جدیدی برای سازه پایه ممکن است منجر به پاسخ بهتری برای توزیع مصالح شود [12]. آنسولا (Ansola) و همکاران [12] روشی را معرفی کردند که در آن از یک فرایند ترکیبی برای بهینه‌سازی همزمان شکل و پیکره استفاده می‌شود. در این روش مسئله ترکیب شده به دو زیرمسئله شکل و پیکره تقسیم می‌شود. از این‌رو از یک روند تکراری دو مرحله‌ای برای بهینه‌سازی استفاده می‌شود؛ به طوری که در مرحله اول با انجام یک گام بهینه‌سازی شکل، هندسه پوسته بهبود می‌یابد و در مرحله دوم توزیع بهینه لایه سخت کننده روی پوسته با استفاده از روش معیار بهینگی انجام می‌گیرد. این کار تا همگرا شدن به یک پاسخ بهینه ادامه پیدا می‌کند.

ایده اصلی فن توزیع مصالح برای مسائل بهینه‌سازی پیکره تبدیل مسئله به مسئله بهینه‌سازی اندازه برای چگالی در محدوده ثابت است. مشکل عمده در اینجا پیدا کردن الگوریتم‌های بهینه‌سازی است که قادر به حل مسئله با تعداد متغیر طراحی زیاد باشد. بدین منظور از دهه شصت میلادی روش‌های معیار بهینگی در حل مسائل بهینه‌سازی سازه‌ای مورد استفاده قرار گرفته‌اند. این روش‌ها، روش‌های غیر مستقیم بهینه‌سازی هستند و برخلاف روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی که مستقیما تابع هدف را بهینه می‌کنند، تلاش می‌کنند تا دسته‌ای از معیارهای مربوط به رفتار سازه را اقناع نمایند. در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی

در مسائل بهینه‌سازی پیکره همانند مسائل بهینه‌سازی اندازه و شکل بسیار متداول شده است. در این روش‌ها مسئله طراحی به عنوان مسئله بهینه‌سازی بر حسب متغیرهای طراحی در نظر گرفته شده و توابع هدف و قید بر حسب این متغیرهای طراحی بیان می‌شوند. با استفاده از مقادیر مشتقات توابع هدف و قید بر حسب متغیرهای طراحی، مسئله بهینه‌سازی حل می‌شود.

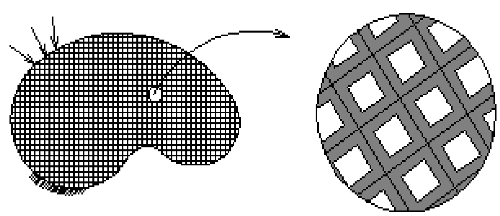
در این مقاله مسئله بهینه‌سازی همزمان شکل و پیکره لایه سخت کننده سازه پوسته‌ای به صورت مسئله حداکثر سازی سختی سازه با استفاده از حداقل‌سازی کارخارجی انجام شده روی سازه در نظر گرفته شده است. شیوه کلی حل مسئله بر اساس روش دو مرحله‌ای پیشنهادی آنسولا و همکاران است؛ طوری که در هر تکرار بهینه‌سازی در مرحله اول شکل سطح پوسته و در مرحله دوم توزیع لایه سخت کننده آن بهینه می‌شوند. این مراحل تا همگرایی پاسخ متناوبا تکرار می‌شوند. برای بهینه‌سازی از روش ریاضی مجانب‌های پویا[۱۳] استفاده شده است. این الگوریتم نشان داده است که تطبیق‌پذیر بوده و برای مسائل با تعداد متغیرهای طراحی زیاد مناسب است [14].

مدل مصالح در بهینه‌سازی پیکره

معرفی یک تابع برای مشخص کردن چگالی مواد در جسم با در نظر گرفتن مواد مرکب مشتمل بر تعداد نامحدودی از سوراخ‌های ریز که به صورت متناوب در این جسم پخش شده‌اند، مسئله بهینه‌سازی پیکره سازه‌ها را به یک مسئله بهینه‌سازی اندازه تبدیل می‌کند و پیچیدگی این مسائل تا حدودی برطرف می‌شود. در واقع استفاده از ایده به‌کارگیری جسم سلولی با ریزسازه‌های متناوب (Periodic Micro Structures)، طبیعت بودن یا نبودن مواد در پیکره جسم را از مقیاس ماکروسکپی به مقیاس میکروسکپی رهنمون نموده و باعث پایداری حل می‌گردد.

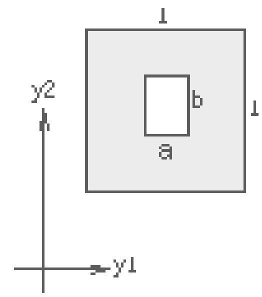
یکی از راه‌هایی که برای مدل کردن مواد در مسائل گسسته بهینه‌سازی پیکره وجود دارد استفاده از مدل مصالح ساختگی همسانگرد با اعمال تاوان است. در این مدل بودن یا نبودن مواد با استفاده از تابع تقریب مناسبی که تابع چگالی مصالح ساختگی نامیده می‌شود، مشخص می‌گردد. این تابع مقادیر بین صفر و یک دارد، به طوری که تابع چگالی صفر به معنی نبود مصالح و مقدار یک به معنی وجود مصالح می‌باشد. با استفاده از این مدل می‌توان خواص مکانیکی ماکروسکپی مصالح را بدست آورد.

در انتخاب ریزسازه‌ها، شکل آنها یکی از مهمترین مسائلی است که باید به آن توجه کرد. شکل انتخاب شده باید به گونه‌ای باشد که چگالی مواد در ریزسازه بتواند کل مقدار ۰ تا ۱ را پوشش دهد. از طرف دیگر شکل حفره باید با کمترین تعداد پارامتر تعریف شود تا میزان متغیرهای طراحی در مسئله بهینه‌سازی به حداقل برسد. سلول‌های مربعی با حفره‌های مستطیل شکل در مرکز آنها ساده‌ترین شکل برای این منظور می‌باشند (شکل (۱)).



شکل ۱ سلول‌های مربعی با حفره‌های مستطیلی

اگر بعد سلول مربعی با ε که مقدار مثبت و بسیار کوچک است نشان داده شود آنگاه اندازه سوراخ با εa و εb مشخص می‌گردد. شکل (۲) سلول واحد را در دستگاه مختصات میکروسکپی نشان می‌دهد. با استفاده از این مدل، سطح اشغال شده توسط مواد جامد به‌صورت زیر محاسبه می‌شود.



شکل ۲ سلول واحد با حفره مستطیلی در مختصات میکروسکپی

$$\Omega_s = \int_\Omega (1-ab)\, d\Omega \qquad (۱)$$

که در این رابطه $0 \le a \le 1$ و $0 \le b \le 1$ و Ω فضای طراحی و Ω_s قسمت جامد فضای طراحی را نشان می‌دهد. با توجه به نکات فوق هر نقطه $x \in \Omega$ دارای مقادیر a و b می‌باشد که متغیرهای طراحی مسئله بهینه‌سازی پیکره هستند.

$$a = a(x) \quad , \quad b = b(x) \qquad (۲)$$

در عمل این توابع به‌وسیله توابع ثابتی در هر جزء از فضای طراحی گسسته سازی‌شده، تقریب زده می‌شوند و بنابراین ابعاد یک ریزسازه در هر جزء ثابت فرض می‌شود. در نتیجه ماتریس کشسانی همگن شده نیز برای هر جزء ثابت خواهد بود. بنابراین در فضای دوبعدی اگر دامنه به N جزء محدود تقسیم شود 2N متغیر طراحی در مسئله بهینه‌سازی پیکره سازه وجود دارد. تابع چگالی ساختگی ξ برای ساختن ریزسازه‌های ساختگی با پارامترهای هندسی در ارتباط است. برای ساختن جسم سلولی شامل سلولهای واحد با حفره‌های مستطیل شکل، $\xi(\mathbf{x})$ به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$\xi(x) = 1 - a(x)\, b(x) \qquad (۳)$$

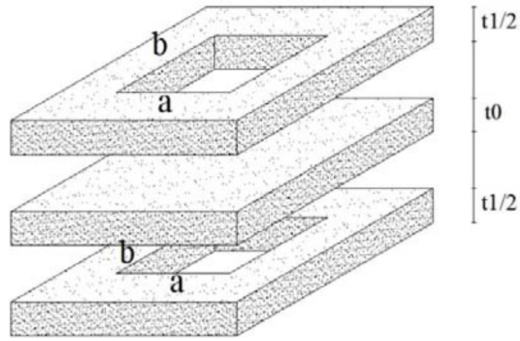
در این رابطه $0 \le \xi(x) \le 1$ و $x \in \Omega$ می‌باشند. به این ترتیب سطح مصالح به صورت زیر به دست می‌آید.

$$\Omega_s = \int_\Omega \xi(x)\, d\Omega \qquad (٤)$$

همچنین چگالی و ماتریس کشسانی به صورت زیر خواهند بود:

$$\rho(x) = \xi(x)\rho^0$$
$$C(x) = \xi(x)^p C^0 \qquad (۵)$$

ρ^0 و C^0 به ترتیب چگالی و ماتریس کشسانی قسمت جامد همگن می‌باشند. در این رابطه p ضریب جریمه و بزرگتر از ۱ (معمولا بین ۳ و ۹ [15]) می‌باشد. همان‌طور که اشاره شد در مدل به‌کار رفته فرض می‌شود که مصالح حاوی تعداد زیادی سلول‌های مربع شکل با حفره‌های مستطیلی بوده و پارامترهای a(x) و b(x) در هر جزء محدود ثابت هستند. حال مدل سلولی معرفی می‌شود که از آن در فرایند بهینه‌سازی پیکره لایه سخت کننده برای سازه‌های پوسته‌ای استفاده خواهد شد. با استفاده از نظریه مونتاژ لایه‌ها (Assembling Plies) [15] مدل سلولی شکل (۳) را می‌توان مورد استفاده قرار داد. در این مدل لایه همسانگرد میانی معرف سازه اصلی و لایه‌های بالایی و پایینی تشکیل دهنده لایه سخت کننده هستند. برای لایه سخت کننده مدل میکروسلولی با حفره‌های مستطیلی مورد استفاده قرار می‌گیرد. همان‌گونه که قبلا اشاره شد ابعاد حفره‌ها و جهت قرارگیری آنها پارامترهای سلولی خواهند بود. باید توجه داشت که در این مدل فرض بر این است که با وجود تغییر ابعاد حفره‌های میکروسکوپی (b,a) در حین فرایند بهینه‌سازی، t_0 ضخامت سازه اصلی و t_1 ضخامت لایه سخت کننده ثابت باقی می‌مانند. در نتیجه اندازه، محل و نحوه قرارگیری لایه سخت کننده (با یک ارتفاع ثابت) به وسیله یک الگوریتم بهینه‌سازی پیکره، مشخص خواهند شد. به خاطر حفظ تقارن، لایه سخت کننده در هر دو طرف سازه در نظر گرفته می‌شود.



شکل ۳ سلول پایه به همراه لایه سخت کننده

حجم اشغال شده توسط لایه‌های سخت کننده را می‌توان از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$V_s = t_1 \int_{\Omega_0} (1-ab)\, d\Omega \qquad (٦)$$

که Ω_0 محدوده لایه میانی از سازه اصلی است.

تعریف هندسه مسئله

اولین مرحله در تعریف مسئله طراحی شکل بهینه، تعریف هندسه است. در تحقیق حاضر از سطوح نربز (NURBS: Non Uniform Rational B-Spline) برای تولید سطح پوسته استفاده می‌شود. این کار امکان ایجاد شکل‌های پیوسته با استفاده از تعداد محدودی متغیر طراحی را فراهم می‌سازد. همچنین این امکان را می‌دهد تا بعد از بهبود متغیرهای طراحی در روند بهینه‌سازی، شکل جدید پوسته با حفظ پیوستگی و نیز مدل اجزای محدود جدید تولید شوند. در این بخش نحوه تعریف سطوح هندسی با استفاده از فن نربز مختصرا شرح داده می‌شود.

توابع پایه بی اسپلاین

$U=\{u_0,...,u_m\}$ مجموعه‌ای پیاپی و غیر نزولی از اعداد حقیقی است، یعنی در آن به ازای $i=0,...,m-1$ داریم $u_{i+1} \geq u_i$. به u_i گره و به مجموعه U بردار گره‌ای گفته می‌شود. در این صورت i امین تابع پایه بی اسپلاین از درجه p (مرتبه $p+1$) که با $N_{i,p}(u)$ نشان داده می‌شود به صورت زیر تعریف می‌شود [16]:

$$N_{i,0}(u)=\begin{cases}1 & \text{if } u_i \leq u < u_{i+1}\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases} \qquad (٧)$$

$$N_{i,p}(u)=\frac{u-u_i}{u_{i+1}-u_i}N_{i,p-1}(u)+\frac{u_{i+p+1}-u}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u)$$

برخی از خواص توابع پایه‌ای بی اسپلاین به صورت زیر می‌باشند:

١- برای همه مقادیر i,p و $0 \leq u \leq 1$ داریم: $N_{i,p}(u) \geq 0$.

٢- جمع مقادیر این توابع در $0 \leq u \leq 1$ برابر واحد است. یعنی $\sum_{i=0}^{n} N_{i,p}(u)=1$.

٣- در صورتی که u خارج از بازه تاثیر $[u_i,u_{i+p+1})$ باشد، $N_{i,p}(u)=0$.

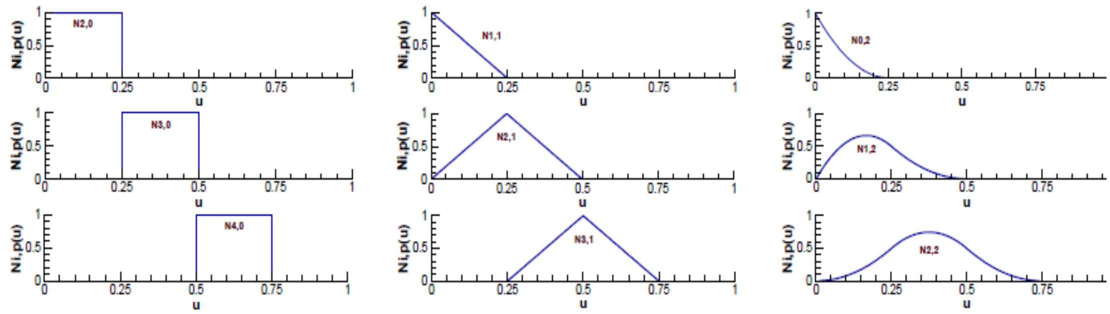
٤- بجز در حالت $p=0$، $N_{i,p}(u)$ تنها دارای یک نقطه ماکزیمم می‌باشد.

٥- در یک گره از بردار گرهی که k بار تکرار شده باشد، $N_{i,p}(u)$، $p-k$ بار بصورت پیوسته مشتق‌پذیر می‌باشد. بنابراین افزایش درجه باعث افزایش پیوستگی و افزایش تعداد تکرار هر گره سبب کاهش پیوستگی خواهد شد.

٦- مشتقات توابع پایه بی اسپلاین را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$N'_{i,p}(u)=\frac{p}{u_{i+p}-u_i}N_{i,p-1}(u)-\frac{p}{u_{i+p+1}-u_{i+1}}N_{i+1,p-1}(u) \qquad (٨)$$

شکل (٤) توابع پایه‌ای بی- اسپلاین از درجات ٠، ١ و ٢ را نشان می‌دهد.



شکل ٤ توابع پایه بی اسپلاین از چپ به راست از درجه صفر تا دو

سطوح نربز

از توابع پایه بی اسپلاین می‌توان برای تولید منحنی‌ها و سطوح هندسی پیچیده استفاده نمود. به سطوحی که با استفاده از توابع پایه بی اسپلاین به صورت کسری و اعمال ضرایب وزن تولید می‌شوند، سطوح نربز گفته می‌شود [16].

یک سطح نربز که در جهت u از درجه P، و در جهت v از درجه q باشد، را می‌توان به وسیله توابع کسری قطعه‌ای به صورت زیر تعریف کرد:

$$S(u,v)=\frac{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}P_{i,j}}{\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}};0\le u,v\le 1 \qquad (۹)$$

در عبارت فوق $\{P_{i,j}\}$ شبکه نقاط کنترلی است که در دو جهت تعریف شده است؛ همچنین $\{w_{i,j}\}$ وزن‌ها، $\{N_{i,p}(u)\}$ و $\{N_{j,q}(v)\}$ توابع پایه‌ای بی- اسپلاین هستند که بر روی بردارهای گره‌ای رابطه (۱۰) تعریف شده‌اند. در این روابط تساویهای $s=m+q+1$ و $r=n+p+1$ برقرار می‌باشد. با تعریف توابع پایه‌ای نسبی قطعه‌ای به صورت رابطه (۱۱)، می‌توان رابطه (۹) را به صورت (۱۲) نوشت. بدین ترتیب با استفاده از رابطه (۱۲) می‌توان هرگونه سطح و رویه پیچیده‌ای را مدل نمود.

$$U=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{p+1},u_{p+1},\ldots,u_{r-p-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{p+1}\right\}$$
$$V=\left\{\underbrace{0,\ldots,0}_{q+1},v_{q+1},\ldots,v_{s-q-1},\underbrace{1,\ldots,1}_{q+1}\right\} \qquad (۱۰)$$

$$R_{i,j}(u,v)=\frac{N_{i,p}(u)N_{j,q}(v)w_{i,j}}{\sum_{k=0}^{n}\sum_{l=0}^{m}N_{k,p}(u)N_{l,q}(v)w_{k,l}} \qquad (۱۱)$$

$$S(u,v)=\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}R_{i,j}(u,v)P_{i,j} \qquad (۱۲)$$

طبیعت پارامتریک مدل طراحی امکان وارسی شکل سازه را از طریق بهبود محل قرارگیری نقاط کنترلی ایجاد می‌کند. به منظور کاهش تعداد متغیرهای طراحی، می‌توان تنها تعداد محدودی از نقاط کنترلی را به عنوان متغیرهای طراحی در نظر گرفت. با حرکت نقاط کنترلی در جهت‌های مشخص، شکل‌های متفاوتی به دست می‌آید. محل‌های قرارگیری نقاط کنترلی به عنوان متغیرطراحی در نظر گرفته می‌شوند. متغیرهای طراحی بهینه‌سازی شکل، مستقل از هم هستند و هر مجموعه از آنها منجر به ایجاد طراحی متفاوتی از شکل خواهد شد.

رابطه سازی مسئله بهینه‌سازی

یک مسئله کلی کشسانی خطی تحت اثر نیروهای حجمی به‌کار برده شده در دامنه Ω و نیروهای سطحی در Γ_t مفروض است. سطح دامنه Ω دارای مرز Γ شامل Γ_d که تغییرمکانها در آن تعریف شده‌اند و Γ_t که بارهای سطحی در آن به کار برده شده‌اند می‌باشد. همچنین فرض می‌شود که:

$$\begin{aligned}\Gamma_t \cup \Gamma_d &= \Gamma \\ \Gamma_t \cap \Gamma_d &= 0\end{aligned} \qquad (۱۳)$$

با به‌کارگیری روش تغییرمکان مجازی، معادلات تعادل با مساوی قرار دادن کار مجازی داخلی و خارجی به دست آورده می‌شوند. با فرض اینکه u میدان تغییرمکان که تعادل سازه الاستیک را تعریف می‌کند باشد و v میدان تغییرمکان مجازی مجاز سینماتیکی باشد می‌توان نوشت:

$$v \in V \text{ where } V = \left\{ v \middle| v \in (H^1(\Omega))^3 \text{ and } v = 0 \text{ on } \Gamma_d \right\} \qquad (۱۴)$$

پس برای یک سازه کشسان با مرز ثابت Γ_d می‌توان نوشت:

$$\int_\Omega \varepsilon^T(v)(C\varepsilon(u))\,d\Omega = \int_\Omega f^T v\,d\Omega + \int_{\Gamma_t} t^T v\,d\Gamma \qquad (۱۵)$$

با بهره‌گیری از تحلیل حساب تغییراتی و تابع نماها و استفاده از فرم انرژی دوخطی برای کار داخلی و فرم بارخطی برای کار خارجی رابطه (۱۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$a(u,v) = \ell(v)\,, \quad \forall v \in V \qquad (۱۶)$$

که در این رابطه:

$$a(u,v) = \int_\Omega \varepsilon^T(v).(C\varepsilon(u))\,d\Omega \qquad (۱۷)$$

$$\ell(v) = \int_\Omega f.v\,d\Omega + \int_{\Gamma_t} t.v\,d\Gamma \qquad (۱۸)$$

هدف از مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها که در این مقاله مورد بحث قرار گرفته است، یافتن سخت‌ترین سازه ممکن با استفاده از یک مقدار مصالح معین است. مینیمم بودن مقدار کار خارجی با میدان تغییرمکان حقیقی و یا مینیمم بودن $\ell(u)$، ماکزیمم بودن سختی عمومی یک سازه را فراهم می‌کند. بنابراین مسئله بهینه‌سازی سازه‌ها با قرار دادن $\ell(u)$ به عنوان تابع هدف به صورت زیر ساخته می‌شود:

$$\begin{aligned}&\text{Minimize} \quad \ell(u) \\ &\text{s.t} \;\; a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ &\text{and} \quad \text{design restrictions}\end{aligned} \qquad (۱۹)$$

که در این رابطه محدودیت‌های طراحی، $a(u,v)$ و $\ell(u)$ توابعی از متغیرهای طراحی می‌باشند. محدودیت‌ها و متغیرهای طراحی با توجه به نوع مسئله بهینه‌سازی (شکل یا پیکره) تعیین می‌شوند.

همان‌طور که پیشتر اشاره شد در این مقاله از روش دو مرحله‌ای پیشنهادی آنسولا و همکاران [12] استفاده می‌شود. در مرحله اول، بهینه‌سازی شکل انجام می‌شود و متغیرهای طراحی بهینه شده که شکل سطح میانی پوسته را تعریف می‌کنند به‌دست می‌آیند. این متغیرهای طراحی همان نقاط کنترلی تولید کننده سطوح نربز هستند. محدودیت طراحی که در این مرحله وجود دارد، حدود تغییرات نقاط کنترلی است که توسط طراح تعیین می‌شود. مسئله بهینه‌سازی در این حالت شامل n متغیر طراحی و n قید (n تعداد نقاط کنترلی) به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned}&\underset{x_i}{\text{Minimize}} \quad \ell(u) \\ &\text{s.t} \quad a(u,v) = \ell(v) \quad \forall v \in V \\ &\text{and} \;\; x_i^{min} \le x_i \le x_i^{max} \quad i = 1,..,n\end{aligned} \qquad (۲۰)$$

که در آن x_i محل نقطه کنترلی و x_i^{max} و x_i^{min} حدود بالا و پایین حرکت نقاط کنترلی هستند.

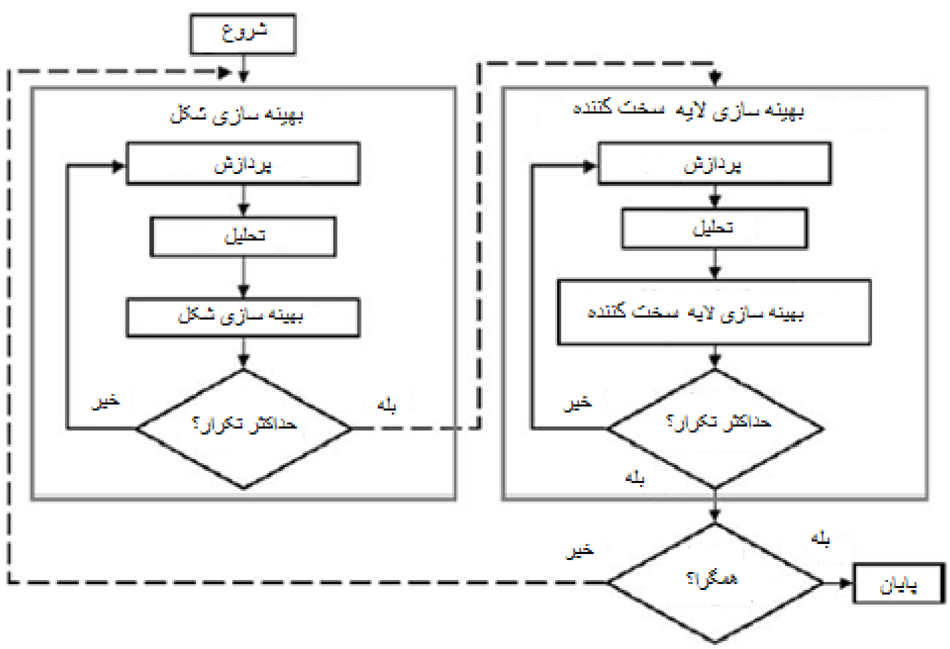
در مرحله دوم چگالی‌های مصالح که برحسب

پارامترهای هندسی حفره‌های ریزمقیاس تعریف شده‌اند و در هر جزء ثابت‌اند، برای توزیع ماده تشکیل دهنده سخت کننده پوسته بهینه می‌شوند. قید طراحی که در این قسمت اعمال می‌شود، مقدار مصالح مورد استفاده برای تشکیل سخت کننده است که می‌تواند توسط طراح تعیین شود. بدین ترتیب مسئله بهینه‌سازی شامل n متغیر طراحی (n تعداد جزءهای محدود است) و یک قید به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned}&\underset{\rho_i}{\text{Minimize}} \quad \ell(u)\\&\text{s.t}\quad a(u,v)=\ell(v)\quad \forall v\in V\\&\text{and}\quad \Omega_s=\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega}\rho_i\,d\Omega\le\bar{\Omega}_s\\&0<\rho_{min}\le\rho_i\le 1\quad i=1,\dots,n\end{aligned} \tag{۲۱}$$

که $\bar{\Omega}_s$ حد بالای حجم مصالح جامد می‌باشد. همچنین ρ_{min} حد پایین چگالی است که برای جلوگیری از تکینی ماتریس سختی اعمال می‌شود که در عمل مقدار آن $\rho_{min}=0.001$ قرار داده می‌شود [14].

روند حل پیاپی مسائل شکل و پیکره تا همگرایی به یک پاسخ درست ادامه می‌یابد. به منظور جلوگیری از تغییرات زیاد در طراحی بهتر است تعداد تکرارها در حلقه‌های داخلی کم باشد [12]. برای مثال‌های حل شده در این مقاله، تعداد تکرارها در هر حلقه برابر یک در نظر گرفته شده است. شکل (۵) نمودار جریان بهینه‌سازی همزمان را نشان می‌دهد.



شکل ۵ نمودار جریان بهینه‌سازی همزمان شکل و پیکره

روش مجانب‌های پویا

روش مجانب‌های پویا و روش مادر آن خطی سازی کوژ [17] (CONLIN: CONvex LINearization) الگوریتم‌های برنامه‌ریزی ریاضی هستند که برای مسائل طراحی پیکره مناسب‌اند. این روش‌ها همانند روش‌های خطی سازی پیاپی (SLP: Sequential Linear Programming) و سهموی سازی پیاپی (SQP: Sequential Quadratic Programming) برای حل مسائل بهینه‌سازی هموار غیرخطی از دنباله‌ای از زیرمسئله‌های تقریبی مشابه استفاده می‌کند. برای مجانب‌های پویا و خطی سازی کوژ این زیرمسئله‌ها تفکیک‌پذیر (separable) و کوژ (convex) می‌باشند و بر اساس مقادیر مشتقات در نقطه تکرار جاری و برخی نقاط تکرار قبلی ساخته می‌شوند. در هر نقطه تکرار این زیرمسئله با استفاده از روش دوگان [18] حل می‌شود و پاسخ زیرمسئله به عنوان طرح بعدی در فرایند تکراری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در روش مجانب‌های پویا تقریب تابع F با n متغیر حقیقی $X=(x_1,\ldots,x_n)$ در اطراف نقطه تکرار X^k به شکل زیر است:

$$F(X)\approx F(X^k)+\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{r_i}{U_i-x_i}+\frac{s_i}{x_i-L_i}\right) \qquad (٢٢)$$

که مقادیر r_i و s_i بصورت زیر می‌باشند:

$$\text{if } \frac{\partial F}{\partial x_i}(X^0)>0 \rightarrow r_i=(U_i-x_i^0)^2\frac{\partial F}{\partial x_i}(X^0)\ ,\ s_i=0$$
$$\text{if } \frac{\partial F}{\partial x_i}(X^0)<0 \rightarrow r_i=0\ ,\ s_i=-\left(x_i^0-L_i\right)^2\frac{\partial F}{\partial x_i}(X^0)$$
(٢٣)

مقادیر مثبت U_i و L_i وارسی کننده‌ی محدوده‌ای هستند که در آن تقریب F قادر به تولید پاسخ‌های معقول برای مسئله بهینه‌سازی است (پارامترهای U_i و L_i مجانب‌های قائم برای تقریب هستند). این مقادیر در الگوریتم بهینه‌سازی، برای هر یک از توابع مسئله در هر تکرار، بسته به تاریخچه تکرار به روز می‌شوند.

بدیهی است که افزایش چگالی، منجر به افزایش سختی و در نتیجه کاهش میزان کار خارجی می‌شود. بنابراین همواره مشتق کار خارجی برای هریک از چگالی‌های هر یک از اجزا منفی خواهد بود. در نتیجه تقریب کار خارجی در تکرار گام k زیرمسئله به صورت زیر خواهد بود:

$$\min\left\{\ell(\rho^k)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\rho_i^k-L_i\right)^2}{\rho_i-L_i}\frac{\partial\ell}{\partial\rho_e}\left(\rho^k\right)\right\}$$
$$\text{s.t}\sum_{i=1}^{n}\Omega_i\rho_e\le\bar{\Omega}_s\ ,\ 0<\rho_{min}<\rho_i<1;\ i=1,\ldots,n$$
(٢٤)

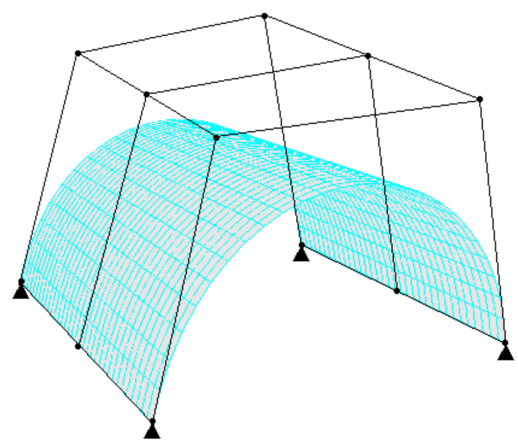
حل این مسئله با استفاده از روش دوگان امکان پذیر است. ابتدا باید تابعی (Functional) لاگرانژ L به صورت زیر تشکیل می‌شود:

$$L=\ell(\rho^k)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\left(\rho_i^k-L_i\right)^2}{\rho_i-L_i}\frac{\partial\ell}{\partial\rho_e}\left(\rho^k\right)+\Lambda\sum_{i=1}^{n}(\Omega_i\rho_e-\bar{\Omega}_s)$$
(٢٥)

سپس این تابعی نسبت به چگالی‌های ρ_i که $\rho_{min}\le\rho_i\le 1\ ,i=1,\ldots,n$ حداقل می‌شود. به خاطر کوژ بودن و تفکیک پذیر بودن L، مسئله به سادگی به صورت جزء به جزء حل می‌شود. گام دوم در روش دوگان حداکثرسازی تابعی به دست آمده نسبت به Λ است که این مرحله منجر می‌شود به تنظیم مقدار Λ، طوری که الگوی بهبود منجر به بدست آوردن مقادیر ρ^{k+1} شود که قید حجمی را تامین کنند. می‌توان مقادیر L_i را به صورت هوشمندانه‌تر، طوری انتخاب نمود که سرعت همگرایی را افزایش دهد.

حل مثال‌های نمونه

در این بخش به حل مثال‌هایی از روش ترکیبی فوق و مشاهده نتایج آن پرداخته می‌شود. در شکل‌های این بخش رنگ سفید بیانگر سازه اولیه و نواحی سیاه شده نشان دهنده نواحی تقویت شده می‌باشند. سازه‌ای که به عنوان اولین مثال مورد بررسی قرار می‌گیرد پوسته‌ای به شکل نیم‌استوانه است که چهار تکیه‌گاه ساده در گوشه‌های آن قرار دارند. از یک زیر برنامه تولید سطح با استفاده از منحنی‌های نربز برای ایجاد هندسه سازه استفاده می‌شود. بدین منظور از دوازده نقطه کنترلی برای تولید شکل استفاده شده است که مختصات قائم محل قرارگیری آنها متغیر طراحی در مسئله بهینه‌سازی شکل خواهند بود. شکل (٦) نحوه قرارگیری نقاط کنترلی و هندسه اولیه سازه، به همراه شبکه‌بندی آن را نشان می‌دهد.



شکل ٦ سازه استوانه‌ای به همراه نقاط کنترلی تولیدکننده سطح آن

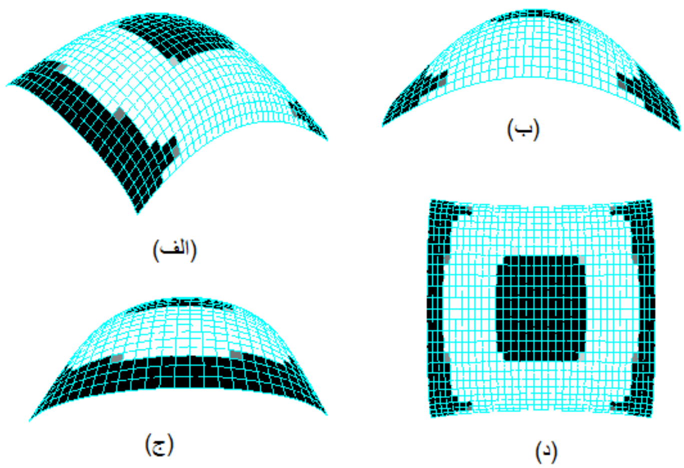
برای تحلیل به روش اجزا محدود سازه به ٨٨٤ جزء محدود تقسیم شده است. ضخامت سازه پوسته‌ای و لایه سخت کننده آن هریک $5\times10^{-3}\,m$ و خصوصیات مکانیکی مصالح $E = 2.1\times10^{6}\,kg/cm^{2}$ و $\upsilon = 0.3$ می‌باشند. در گام بهینه‌سازی شکل، متغیرهای طراحی، مختصات قائم نقاط کنترلی تولیدکننده سطح هستند. بنابراین در این مرحله دوازده متغیر طراحی به همراه یک قید محدوده حرکت برای هریک وجود دارد. در قسمت بهینه‌سازی پیکره به تعداد هر جزء یک چگالی وجود دارد. در نتیجه ٨٨٤ متغیر طراحی به همراه یک قید محدوده تغییرات (بین ρ_{min} و ١) برای هرکدام وجود دارد. علاوه بر آن یک قید حجمی هم در این مرحله لحاظ می‌شود که کنترل‌کننده میزان مصالح مورد استفاده جهت توزیع در لایه سخت کننده است که به صورت درصدی از مصالح کل دامنه بیان می‌شود. برای مثال‌های این مقاله، این میزان برابر ٤٠ درصد در نظر گرفته شده است. همچنین ضریب تاوان برای مدل مصالح ساختگی برابر $p = 3$ درنظر گرفته می‌شود.

سازه مذکور تحت بارگذاری‌های مختلف قرار گرفته است که شامل بار متمرکز $5\,KN$ وارد بر مرکز، بار گسترده خطی ثابت در وسط به اندازه $150\,N/cm$ و بار گسترده سطحی $2\,N/cm^{2}$ روی کل سطح آن می‌باشد. نتایج بهینه‌سازی همزمان حالات بارگذاری مذکور به ترتیب در شکل‌های (٧)، (١٠) و (١٢) قابل مشاهده است. همان‌طور که ملاحظه می‌شود برای هر یک از حالات بارگذاری علاوه بر تفاوت پیکره لایه سخت کننده، شکل متفاوتی نسبت به حالت اولیه به دست می‌آید که معرف بهترین شکل و بهترین توزیع ماده در لایه سخت کننده می‌باشد. همچنین روند همگرایی پاسخ در تکرارها برای حالات بارگذاری مذکور به ترتیب در شکل‌های (٨)، (١١) و (١٣) نشان داده شده است.

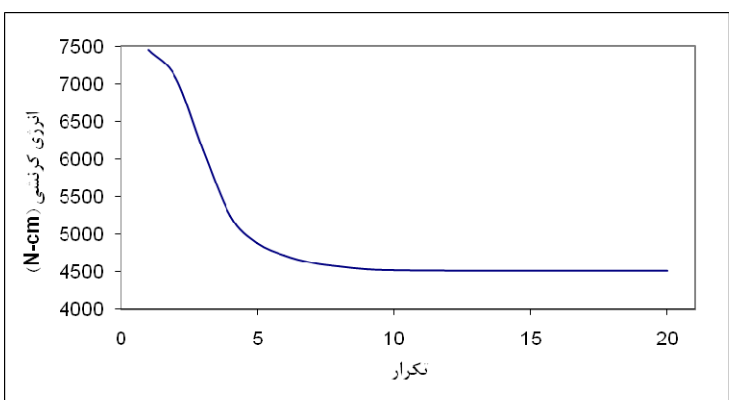
در مثال بعدی سازه کره‌ای شکل مورد بررسی قرار می‌گیرد (شکل ١٤). این سازه در لبه انتهایی خود تحت تکیه گاه ساده قرار گرفته است. برای تولید و وارسی شکل آن از ٩ نقطه کنترلی استفاده شده است. تعداد اجزا محدود برای این سازه ٢٠٤٨ در نظر گرفته شده است. ضخامت و خصوصیات مکانیکی همانند مثال قبلی لحاظ شده است. بنابراین تعداد متغیرهای طراحی مسائل شکل و پیکره در این مثال به ترتیب برابر ٩ و ٢٠٤٨ می‌باشد.

همانند مثال قبلی حجم مصالح تشکیل دهنده لایه سخت کننده ٤٠ درصد و ضریب تاوان برابر ۳ در نظرگرفته شده است.

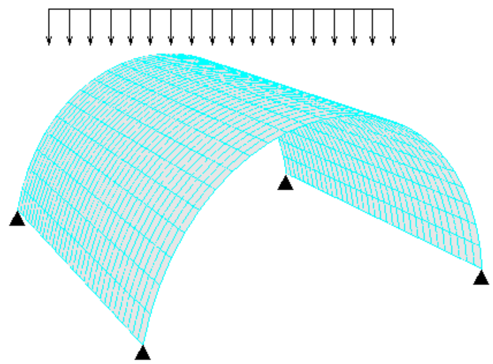
دو حالت بارگذاری برای این سازه شامل بار متمرکز برابر 5KN وارد بر مرکز و بار گسترده سطحی $50 N/cm^2$ در نظر گرفته شده است. نتایج حاصل به ترتیب در شکل‌های (١٥) و (١٧) نمایش داده شده است. همچنین در شکل‌های (١٦) و (١٨) نمودارهای روند همگرایی به ترتیب نشان داده شده‌اند. چنانچه مشاهده می‌شود، برای شکل‌های این مثال، شکل اولیه سازه تغییر چندانی نداشته است. این مسئله به خاطر تقارن شکل هندسی کره و بارگذاری‌های این مثال می‌باشد. به عبارت دیگر شکل اولیه کره برای بارگذاری‌های این مثال بهینه می‌باشد. اما پیکره سخت کننده با توجه به نوع بارگذاری‌ها تغییر کرده است.



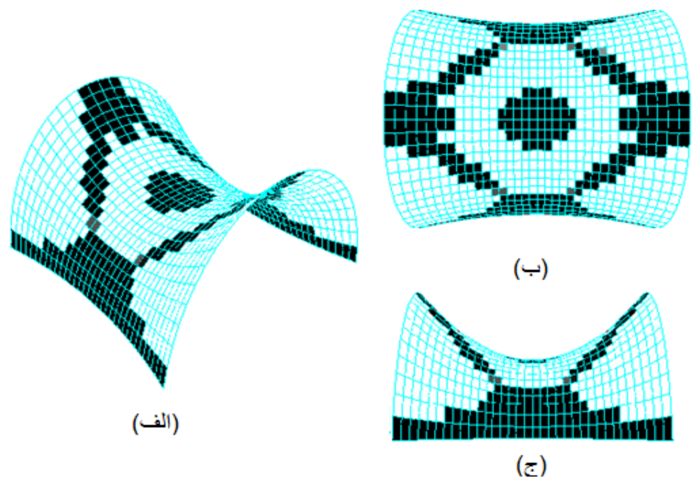
شکل ٧ بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز، (الف) نمای کلی، (ب) و (ج) نمای جانبی، (د) نما از بالا



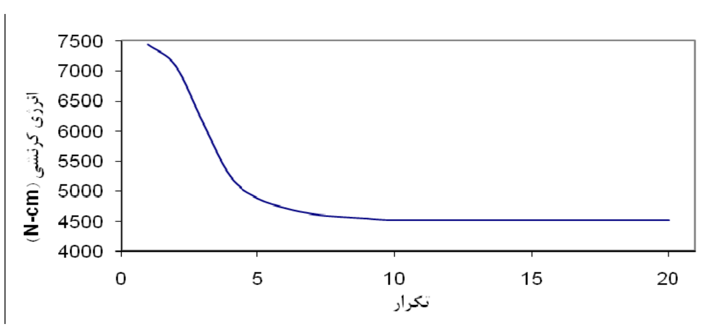
شکل ٨ نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار متمرکز



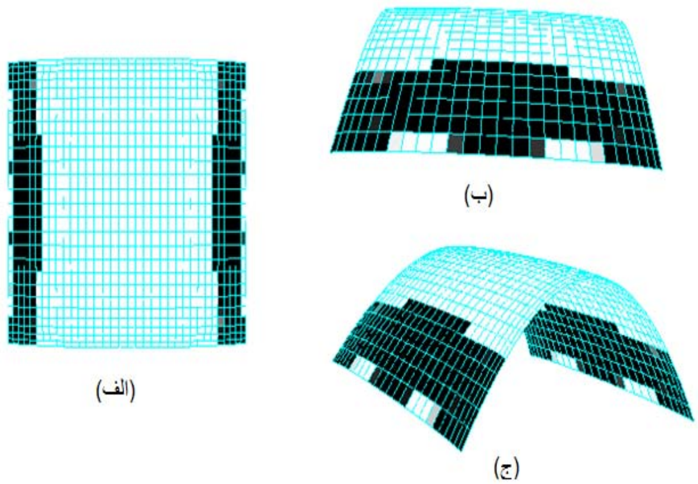
شکل ۹ سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی



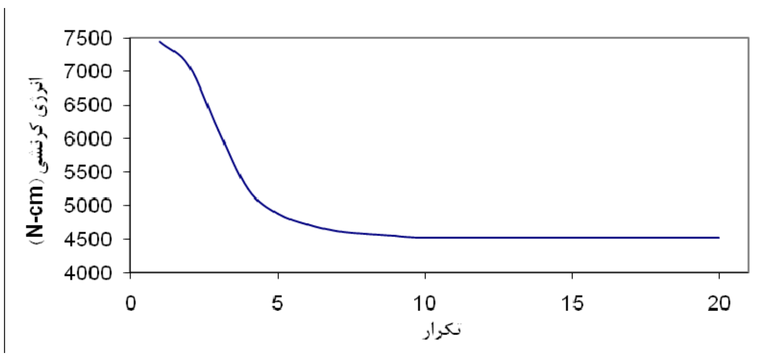
شکل ۱۰ بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی، (الف) نمای کلی، (ب) نما از بالا، و (ج) نمای جانبی



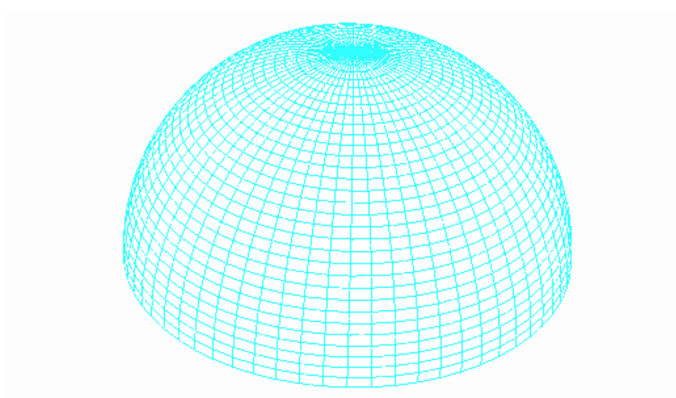
شکل ۱۱ نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده خطی



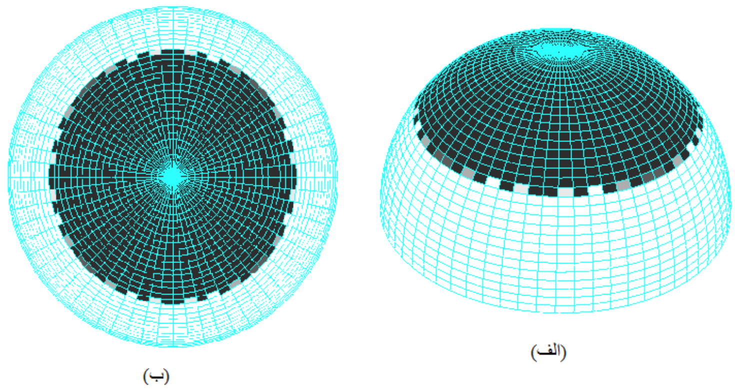
شکل ۱۲ بهینه‌سازی سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت، (الف) نما از بالا، (ب) نمای جانبی، و (ج) نمای کلی



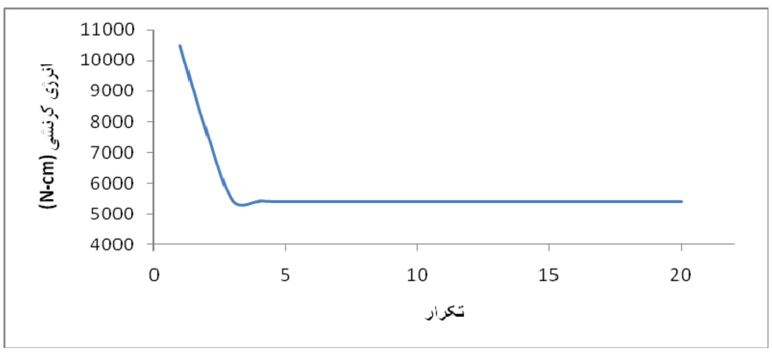
شکل ۱۳ نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه استوانه‌ای تحت بار گسترده یکنواخت



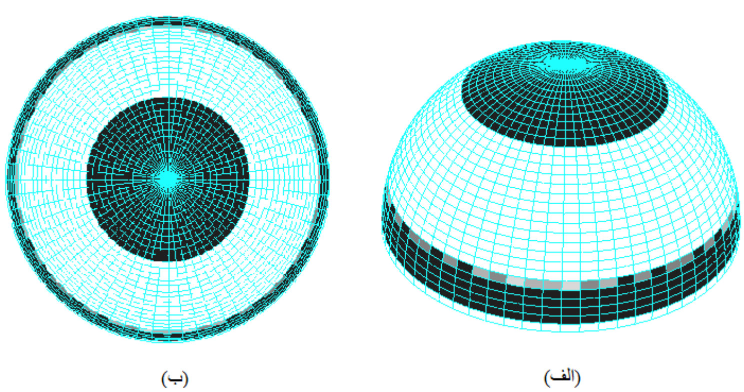
شکل ۱٤ سازه کره‌ای شکل



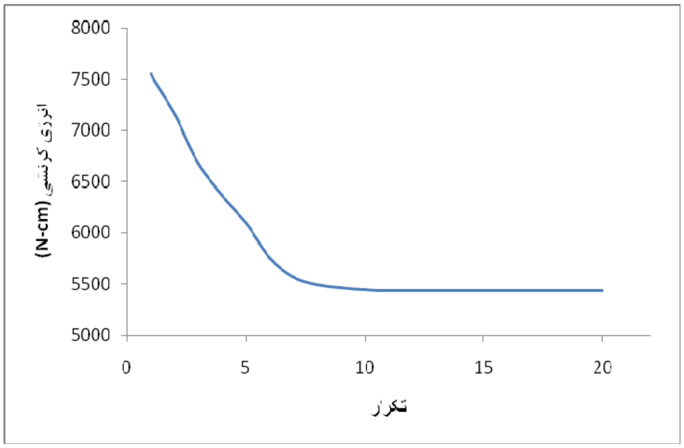
شکل ۱۵ بهینه سازی سازه کره‌ای تحت بار متمرکز (الف) نمای جانبی (ب) نمای از بالا



شکل ١٦ نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه کره‌ای تحت بار متمرکز



شکل ۱۷ بهینه سازی سازه کره‌ای تحت بار گسترده (الف) نمای جانبی (ب) نمای از بالا



شکل ۱۸ نمودار همگرایی بهینه‌سازی همزمان سازه کره‌ای تحت بار گسترده

نتایج

در این مقاله از روش بهینه‌سازی همزمـان بـرای طراحـی شکل صفحه میانی پوسته، به همـراه پیکـره لایـه سـخت کننده آن جهت رسیدن به سخت‌ترین سازه سـاخته شـده با مقدار مشخصی مصالح لایه سخت کننده، استفاده شـده است. در این روش در هر گام بهینه‌سازی، بعد از طراحی شکل صفحه میانی، بهینه‌سازی لایه سـخت کننـده انجـام شده است. برای تولید شکل از فـن تولیـد سـطوح نربـز استفاده شـده اسـت و نقـاط کنترلـی سـطوح بـه عنـوان متغیرهای طراحـی در مرحلـه بهینـه‌سـازی شـکل مـورد استفاده قرار گرفته‌اند. در بهینه‌سازی پیکـره لایـه سـخت کننده، از مدل مصالح ساختگی همسانگرد با اعمال تـاوان استفاده شده و چگالی مصالح هر یک از اجزا محدود کـه خود تابع پارامترهـای هندسـی مـواد ریزسـلولی تشـکیل دهنده مصالح هستند، بـه عنـوان متغیـر طراحـی در نظـر گرفته شده‌اند. از روش مجانب‌های پویا برای حل مسـئله بهینه‌سازی هر دو زیرمسئله شکل و پیکره اسـتفاده شـده است.

درگذشته بـه خـاطر زیـاد بـودن تعـداد متغیرهـای طراحی در مسائل بهینه‌سازی پیکـره از روش‌هـای معیـار بهینگی برای حل مسئله بهینه‌سازی اسـتفاده مـی‌شـد. در سال‌های اخیر استفاده از روش‌های برنامه‌ریـزی ریاضـی در این دسته از مسائل بسیار متداول شده اسـت. در ایـن مقاله نیز از یکی از روش‌های برنامه‌ریزی ریاضی بـه نـام مجانب‌های پویا استفاده شده‌است. همان‌طور که مشـاهده شد با وجود زیاد بـودن تعـداد متغیرهـای طراحـی، ایـن روش قادر به حل مسئله می‌باشد.

در این مقاله بهینـه‌سـازی همزمـان شـکل و پیکـره برای رابطه سازی حداکثرکردن سختی سازه درنظر گرفتـه شده است. به‌عنـوان کارهـای آینـده مـی‌تـوان معیارهـای طراحی متفاوتی را با توابـع هـدف و قیـد دیگـر درنظـر گرفت. به عنوان مثال می‌توان مسائل کمانش، اعمال قیـد تنش و بهینه‌سازی تحت بارهـای دینـامیکی و یـا تحـت ترکیب بارها را مورد بررسی قرار داد.

مراجع

1. Zienkiewicz, O.C., Campbell, J.S., "Shape Optimization and Sequential Linear Programming" *Optimal Structural Design*, Wiley, NY, (1973).

2. Haftka, R.T., Gandhy, R.V., “Structural shape optimization A survey”, *Comput Methods Appl Mech Eng,* 57, pp. 91–106, (1986).
3. Ding, Y., “Shape optimization of structures: A Literature Survey”, *Comput Struct,* 24, pp. 985–1004, (1986)
4. Olhoff, N., Rozvany, GIN., (eds.), *First World Cong. on Structural and Multidisciplinary Optimization, May 28–June 2, Goslar,* (1995).
5. Bendsoe, M.P., Kikuchi, N., “Generating optimal topologies in structural design using a homogenization method”, *Comput Methods Appl Mech Eng,* 2, pp. 197–224, (1988).
6. Bendsoe, M.P., “Optimal shape design as a material distribution problem”. *Struct Optim,* 1, pp. 193–202, (1989).
7. Xie, Y.M., Steven, G.P., “Evolutionary structural optimization. Berlin, Heidelberg”, Springer, (1997).
8. Kaveh, A., Hassani, B., Shojaee, S., Tavakkoli, S.M., “Structural topology optimization using ant colony”, *Engineering Strucural,* 30, pp. 2559-2565, (2008).
9. Dorn, W., Gomory, R., “Greenberg, M. Automatic design of optimal structures”, *J Mec,*3, pp. 25–52, (1964).
10. Olhoff, N., Bendsoe, M.P., Rasmussen, J.,: “On CAD integrated structural topology and design optimization”, *Comput Methods Appl Mech Eng,* 89, pp. 259–279, (1991).
11. Lin, C.Y., Chao, L.S., “Automated image interpretation for integrated topology and shape optimization”, *Struct Optim,* 20, pp. 125–137, (2000).
12. Ansola, R., Canales, J., Tarrago J.A., Rasmussen, J., “Combined shape and reinforcement layout optimization of shell structures”, *Struct Multidisc Optim,* 27, pp. 219–227, (2004).
13. Svanberg, K., “The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24, pp. 359–373, (1987).
14. Bendsoe, M.P., Sigmund, O., “Topology Optimization, Theory, Methods, and Applications”**.** Berlin**,** Heidelberg, New York: Springer, (2004).
15. Hassani, B., Hinton, E., “Homogenization and Structural Topology Optimization Theory, Practice and Softwar” Springer, New York Berlin Heidelberg, (1999).
16. Piegl, L., Tiller, W., “The NURBS Book(second edition)”, Springer, (1997).
17. Fleury, C., “CONLIN**:** an efficient dual optimizer based on convex approximation concepts”, *Structural Optimization,* 1, pp. 81-89, (1989).
18. Fleury, C., Braibant, V., “Structural optimization - a new dual method using mixed variables”, *Int. J. Num. Meth. Eng,* 23, pp. 409-428, (1986).